УДК 517.983.23

Л. Ф. Коркина, М. А. Рекант

РАСШИРЕНИЕ КЛАССА СТЕПЕННЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть X – комплексное банахово пространство, A – плотно определенный в X линейный замкнутый оператор со значениями в X; известна степенная оценка нормы резольвенты оператора A в некоторой области Ω, содержащей неположительную вещественную полуось. В таких предположениях рядом авторов (см., например, [1–4]) вводятся комплексные степени оператора A и устанавливается ряд их свойств. В данной работе рассматриваются операторные функции, порождаемые скалярными функциями, аналитическими в некоторой области, содержащей $\mathbb{C}\backslash\Omega$, и имеющими степенную асимптотическую оценку модуля на бесконечности. Отдельные свойства степенных операторных функций переносятся на операторные функции указанного класса.

Перейдем к изложению результатов работы.

Пусть $\Omega = \Omega(a_0, \varphi_0) \subset \mathbb{C}$ $(a_0 > 0,\ 0 < \varphi_0 < \pi)$ – область, содержащая ноль, с границей

$$L = L(a_0, \varphi_0) = \bigcup_{j=1}^{3} L_j(a_0, \varphi_0),$$

где

$$L_1 = L_1(a_0, \varphi_0) = \{\lambda :\ \lambda = te^{i\varphi_0},\ t \geq a_0\},$$
$$L_2 = L_2(a_0, \varphi_0) = \{\lambda :\ \lambda = a_0 e^{i\varphi},\ |\varphi| \leq \varphi_0\},$$
$$L_3 = L_3(a_0, \varphi_0) = \{\lambda :\ \lambda = te^{-i\varphi_0},\ t \geq a_0\}.$$

Обход контура L задается так, что область Ω остается справа. Замкнутая область $\overline{\Omega(a_0, \varphi_0)}$ лежит в резольвентном множестве оператора A, и в ней справедлива оценка нормы его резольвенты $R(\lambda) = (A - \lambda E)^{-1}$ (E – единичный оператор):

$$\|R(\lambda)\| \leq C_0(|\lambda| + 1)^{-\gamma} \qquad (C_0 > 0,\ \gamma \leq 1). \tag{1}$$

Введем классы аналитических функций F_0 и F_1 в соответствующих областях. Для $\varphi \in (\varphi_0, \pi)$, $a \in (0, a_0)$, σ, σ_1, $\sigma_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1 \leq \sigma_2$ полагаем

$F_0 = F_0(a,\varphi,\sigma)$ – множество функций f, непрерывных в $\mathbb{C}\backslash\Omega(a,\varphi)$ и аналитических в $\mathbb{C}\backslash\overline{\Omega(a,\varphi)}$, удовлетворяющих при $\lambda \notin \Omega(a,\varphi)$ неравенству

$$|f(\lambda)| \le C|\lambda|^{\sigma} \qquad (C \in \mathbb{R});$$

$F_1 = F_1(a,\varphi,\sigma_1,\sigma_2)$ – множество функций f, непрерывных в $\mathbb{C}\backslash\Omega(a,\varphi)$ и аналитических в $\mathbb{C}\backslash\overline{\Omega(a,\varphi)}$, удовлетворяющих при $\lambda \notin \Omega(a,\varphi)$ неравенствам

$$C_1|\lambda|^{\sigma_1} \le |f(\lambda)| \le C_2|\lambda|^{\sigma_2} \qquad (0 < C_1 \le C_2 < +\infty)$$

(константы C, C_1, C_2 в определениях зависят от функции, но не от точки). Для $f \in F_0(a,\varphi,\sigma)$, $n \in \mathbb{Z}$, $\sigma < n+\gamma-1$ положим

$$f(A,n)x = -\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\lambda)\lambda^{-n}R(\lambda)A^n x d\lambda \tag{2}$$

для тех x, для которых правая часть имеет смысл.

Лемма 1. *Пусть $n \in \mathbb{Z}$, $\sigma < n+\gamma-1$, $f \in F_0$. Тогда*

$$\int_{L(a,\varphi)} f(\lambda)\lambda^{-n}R(\lambda)\, d\lambda = \int_{L(a_0,\varphi_0)} f(\lambda)\lambda^{-n}R(\lambda)\, d\lambda.$$

Доказательство. Пусть $R > a$, $M_1 = M_1(R,\varphi)$, $M_2 = M_2(R,\varphi)$ – точки пересечения $L(a,\varphi)$ с окружностью $C(0,R)$ с центром в нуле радиуса R, а $M_3 = M_1(R,\varphi_0)$, $M_4 = M_2(R,\varphi_0)$ – точки пересечения $L(a_0,\varphi_0)$ с окружностью $C(0,R)$, причем M_1, M_3 лежат в верхней полуплоскости, а M_2, M_4 – в нижней; P_1, P_2 – точки пересечения $L(a,\varphi)$ и $L(a_0,\varphi_0)$ с вещественной осью соответственно. Оценим интеграл $J_1(R) = \int_{\smile M_1M_3} f(\lambda)\lambda^{-n}R(\lambda)\, d\lambda$ по ориентированной дуге M_1M_3 окружности $C(0,R)$. Так как $\smile M_1M_3 \subset \overline{\Omega(a_0,\varphi_0)}$, то

$$\|J_1(R)\| \le C(a,n)\int_{\smile M_1M_3} |\lambda|^{\sigma-n}(|\lambda|+1)^{-\gamma}|d\lambda| \le$$
$$\le 2\pi C(a,n)R^{\sigma-n+1}(R+1)^{-\gamma} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

т. е. $J_1(R) \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Аналогично получаем, что

$$J_2(R) = \int_{\smile M_4M_2} f(\lambda)\lambda^{-n}R(\lambda)\, d\lambda \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Так как $f \in F_0(a,\varphi,\sigma)$, то интегралы по дугам $M_1P_1M_2$ и $M_1M_3P_2M_4M_2$ от функции $f(\mu)\mu^{-n}R(\mu)$ равны. Переходя к пределу в этих интегралах при $R \to +\infty$, получаем заключение леммы. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\sigma < -1,\ g \in F_0(a,\varphi,\sigma)$. *Тогда* $\int_{L(a,\varphi)} g(\lambda)\ d\lambda = 0$.

Доказательство. Пусть $R > a,\ M_1 = M_1(R,\varphi),\ M_2 = M_2(R,\varphi)$ – точки пересечения $L(a,\varphi)$ с окружностью $C(0,R)$ с центром в нуле радиуса R, лежащие в верхней и нижней полуплоскости соответственно, $L_R(a,\varphi)$ – ограниченная часть кривой $L(a,\varphi)$ с началом в точке M_1 и концом в точке M_2, $\smile M_1M_2$ – ориентированная дуга окружности $C(0,R)$ (обход по часовой стрелке). Тогда

$$\int_{L(a,\varphi)} g(\lambda)\ d\lambda = \lim_{R\to+\infty} \int_{L_R(a,\varphi)} g(\lambda)\ d\lambda = \lim_{R\to+\infty} \int_{\smile M_1M_2} g(\lambda)\ d\lambda = 0,$$

так как $|g(\lambda)| \le R^{\sigma}$ для $\lambda \in \smile M_1M_2$ и $\left|\int_{\smile M_1M_2} g(\lambda)\ d\lambda\right| \le R^{\sigma+1}$ (использовано, что $g \in F_0(a,\varphi,\sigma)$). Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $g \in F_0,\ \sigma < 0$. *Тогда*

$$\int_{L(a,\varphi)} \frac{g(\mu)}{\mu-\lambda}\ d\mu = 2\pi i g(\lambda)$$

для $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\overline{\Omega(a,\varphi)}$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2 и проводится с применением интегральной формулы Коши.

Утверждение 1. *Пусть* $\sigma < n+\gamma-1,\ f \in F_0$. *Тогда* $D(f(A,n)) = D(A^n)$, *при* $x \in D(A^n)$ *интеграл* (2) *сходится абсолютно, оператор* $f(A,n)$ *линеен и допускает замыкание, которое не зависит от* $n > \sigma-\gamma+1$. *Если* $n \le 0$, *то оператор* $f(A,n)$ *непрерывен на* X.

Доказательство. По определению $f(A,n)$ имеем $D(f(A,n)) \subset D(A^n)$. С другой стороны, для $x \in D(A^n)$, $\lambda \in \overline{\Omega(a,\varphi)}$ из неравенств

$$\|f(\lambda)\lambda^{-n}R(\lambda)A^nx\| \le |f(\lambda)|\ |\lambda^{-n}|\ \|R(\lambda)\|\|A^nx\| \le C|\lambda|^{\sigma-n-\gamma}\|A^nx\|$$

следует абсолютная сходимость интеграла (2). Итак, установлено, что $D(f(A,n)) = D(A^n)$.

Ясно, что оператор $f(A,n)$ линеен. Пусть $n > 0$. Покажем, что оператор $f(A,n)$ допускает замыкание. Для этого достаточно убедиться, что для всех $y \in X$ и последовательностей $\{x_k\} \subset D(f(A,n))$, удовлетворяющих условиям

1) $x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$,

2) $f(A,n)x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y$,

следует, что $y=0$.

Пусть последовательность $\{x_k\}\subset D(f(A,n))$ и элемент $y\in X$ удовлетворяют требованиям 1 и 2. Так как A^{-n} – линейный непрерывный оператор, коммутирующий с $R(\mu)$, то

$$\|A^{-n}f(A,n)x_k\| = \frac{1}{2\pi}\left\|\int_L f(\lambda)\lambda^{-n}R(\lambda)x_k\,d\lambda\right\| \le$$
$$\le \frac{1}{2\pi}\int_L |f(\lambda)|\;|\lambda|^{-n}\|R(\lambda)\|\;|d\lambda|\;\|x_k\| \le C\int_L |\lambda|^{\sigma-n-\gamma}|d\lambda|\;\|x_k\| < +\infty,$$

так как $\sigma < n+\gamma-1$. Из условия 1 получаем, что $A^{-n}f(A,n)x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. С другой стороны, в силу условия 2 и непрерывности оператора A^{-n}, $A^{-n}f(A,n)x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} A^{-n}y$. Таким образом, $A^{-n}y=0$ и $y=0$.

Пусть теперь $n\le 0$. Тогда оператор A^n ограничен. Непрерывность оператора $f(A,n)$ следует из справедливого для любого $x\in X$ неравенства

$$\|f(A,n)x\| \le \frac{1}{2\pi}\int_L \|f(\lambda)\lambda^{-n}R(\lambda)\|\;|d\lambda|\;\|A^n\|\;\|x\|.$$

Установим теперь, что $f(A,n)x = f(A,n-1)x$ для $x\in D(A^n)$, $n-1 > \sigma-\gamma+1$. Действительно, для таких x и n

$$f(A,n)-f(A,n-1) =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\left(\int_L f(\lambda)\lambda^{-n}R(\lambda)A^n x\,d\lambda - \int_L f(\lambda)\lambda^{-n+1}R(\lambda)A^{n-1}x\,d\lambda\right) =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\lambda)\lambda^{-n}R(\lambda)(A-\lambda E)A^{n-1}x\,d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\lambda)\lambda^{-n}\,d\lambda\;A^{n-1}x = 0$$

по лемме 2, что и требовалось.

Докажем теперь, что при $n>\sigma-\gamma+1$ оператор $\overline{f(A,n)}$ не зависит от n. Установим сначала, что $\overline{f(A,k)} = \overline{f(A,n)}$ при $k>n\ge 0$. Достаточно убедиться в том, что $\overline{f(A,k)} \supset f(A,n)$.

Пусть $x\in D(A^n)=D(f(A,n))$. Положим $w=A^n x$. Так как множество $D(A^{k-n})$ плотно в X [1, с. 30], то существует последовательность $\{w_n\}\subset D(A^{k-n})$, сходящаяся к w. Положим $x_m = A^{-n}w_m$. Тогда $\{x_m\}\subset D(A^k)$ и $x_m\to x$ при $m\to\infty$ (в силу непрерывности A^{-n}). Используя определение

$f(A, n)$, получаем

$$f(A,k)x_m = f(A,n)x_m = f(A,n)A^{-n}w_m =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\mu)\mu^{-n}R(\mu)A^n A^{-n}w_m \, d\mu =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\mu)\mu^{-n}R(\mu)w_m \, d\mu \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\mu)\mu^{-n}R(\mu)w \, d\mu =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\mu)\mu^{-n}R(\mu)A^n x \, d\mu = f(A,n)x$$

(здесь сходимость интегралов вытекает из непрерывности оператора $\int_L f(\mu)\mu^{-n}R(\mu)\, d\mu$: $\|f(\mu)\mu^{-n}R(\mu)\| \le C|\mu|^{\sigma-n-\gamma}$, а $\sigma-n-\gamma<-1$). Таким образом, $x\in D(\overline{f(A,k)})$ и $\overline{f(A,k)}x = f(A,n)x$. Если $\sigma-\gamma+1\ge 0$, то доказывать больше нечего. Если же $\sigma-\gamma+1<0$, т. е. $\sigma<\gamma-1$, то для $n\in(\sigma-\gamma+1,0]$ оператор $f(A,n)$, не зависящий от n, непрерывен на X. Следовательно, не зависит от таких n и совпадающий с ним оператор $\overline{f(A,n)}$. Утверждение доказано.

Определение 1. *Пусть $f(\lambda)\in F_0(a,\varphi,\sigma)$. Тогда операторную функцию $f(A)$ зададим формулой $f(A)=\overline{f(A,n)}$ для $n>\sigma-\gamma+1$.*

Замечание 1. *Если $\sigma<\gamma-1$, то оператор $f(A)$ непрерывен как совпадающий с $f(A,0)$.*

Утверждение 2. *Пусть $n_i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $n_i>\sigma_i-\gamma+1$, $f_i\in F_0(a,\varphi,\sigma_i)$ $(i=1,2)$. Тогда*

$$(f_1f_2)(A,n_1+n_2)\subset f_1(A,n_1)f_2(A,n_2).$$

Доказательство. Пусть $a<a_1<a_2<a_0$, $\varphi_0<\varphi_2<\varphi_1<\varphi$, $x\in D(A^{n_1+n_2})$. Так как $D(A^{n_1+n_2})\subset D(A^{n_2})$, то сходится интеграл

$$\int_{L(a_2,\varphi_2)} f_2(\mu_2)\mu_2^{-n_2}R(\mu_2)A^{n_2}x \, d\mu_2.$$

Кроме того, сходится интеграл

$$\int_{L(a_2,\varphi_2)} f_2(\mu_2)\mu_2^{-n_2}R(\mu_2)A^{n_2}(A^{n_1}x)\, d\mu_2 = \int_{L(a_2,\varphi_2)} f_2(\mu_2)\mu_2^{-n_2}R(\mu_2)A^{n_1+n_2}x \, d\mu_2.$$

В силу замкнутости оператора A^{n_1}

$$A^{n_1}\int_{L(a_2,\varphi_2)} f(\mu_2)\mu_2^{-n_2}R(\mu_2)A^{n_2}x \, d\mu_2 = \int_{L(a_2,\varphi_2)} f(\mu_2)\mu_2^{-n_2}R(\mu_2)A^{n_1+n_2}x \, d\mu_2.$$

Тогда

$$-2\pi i f_2(A,n_2)x = \int_{L(a_2,\varphi_2)} f_2(\mu_2)\mu_2^{-n_2} R(\mu_2) A^{n_2} x \, d\mu_2 \in D(A^{n_1})$$

и имеет смысл $f_1(A,n_1)f_2(A,n_2)x$. При этом

$$f_1(A,n_1)f_2(A,n_2)x =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{L(a_1,\varphi_1)} f_1(\mu_1)\mu_1^{-n_1} R(\mu_1) A^{n_1} \left[\int_{L(a_2,\varphi_2)} f_2(\mu_2)\mu_2^{-n_2} R(\mu_2) A^{n_2} x \, d\mu_2\right] d\mu_1 =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{L(a_1,\varphi_1)} d\mu_1 \int_{L(a_2,\varphi_2)} f_1(\mu_1)\mu_1^{-n_1} f_2(\mu_2)\mu_2^{-n_2} R(\mu_1)R(\mu_2) A^{n_1+n_2} x \, d\mu_2 =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{L(a_1,\varphi_1)} d\mu_1 \int_{L(a_2,\varphi_2)} f_1(\mu_1)\mu_1^{-n_1} f_2(\mu_2)\mu_2^{-n_2} \frac{R(\mu_1)-R(\mu_2)}{\mu_1-\mu_2} A^{n_1+n_2} x \, d\mu_2 =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{L(a_1,\varphi_1)} f_1(\mu_1)\mu_1^{-n_1} R(\mu_1)\, d\mu_1 \int_{L(a_2,\varphi_2)} \frac{f_2(\mu_2)\mu_2^{-n_2}}{\mu_1-\mu_2} A^{n_1+n_2} x \, d\mu_2 +$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2}\int_{L(a_1,\varphi_1)} d\mu_1 \int_{L(a_2,\varphi_2)} f(\mu_1)\mu_1^{-n_1} f_2(\mu_2)\mu_2^{-n_2} \frac{R(\mu_2)}{\mu_1-\mu_2} A^{n_1+n_2} x \, d\mu_2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{L(a_2,\varphi_2)} f_2(\mu_2)\mu_2^{-n_2} R(\mu_2)\, d\mu_2 \int_{L(a_1,\varphi_1)} f_1(\mu_1)\frac{\mu_1^{-n_1}}{\mu_1-\mu_2} A^{n_1+n_2} x \, d\mu_1 =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{L(a_2,\varphi_2)} f_1(\mu_2)f_2(\mu_2)\mu_2^{-n_1-n_2} R(\mu_2) A^{n_1+n_2} x \, d\mu_2 = (f_1 f_2)(A, n_1+n_2)x.$$

Здесь использованы следующие равенства:

$$\int_{L(a_2,\varphi_2)} \frac{f_2(\mu_2)\mu_2^{-n_2}}{\mu_1-\mu_2} A^{n_1+n_2} x \, d\mu_2 = 0,$$

$$\int_{L(a_1,\varphi_1)} \frac{f_1(\mu_1)\mu_1^{-n_1}}{\mu_1-\mu_2} A^{n_1+n_2} x \, d\mu_1 = -2\pi i f_1(\mu_2)\mu_2^{-n_1} A^{n_1+n_2} x,$$

вытекающие из лемм 2 и 3 соответственно.

Кроме того, был изменен порядок интегрирования по кривым $L(a_1,\varphi_1)$ и $L(a_2,\varphi_2)$, законность чего сейчас будет установлена. Для этого достаточно убедиться в сходимости интеграла

$$\int_{L(a_1,\varphi_1)} |d\mu_1| \int_{L(a_2,\varphi_2)} |f_1(\mu_1)||\mu_1|^{-n_1} |f_2(\mu_2)||\mu_2|^{-n_2} \frac{\|R(\mu_2)A^{n_1+n_2}x\|}{|\mu_1-\mu_2|}\, |d\mu_2|. \quad (3)$$

Заметим, что для подынтегральной функции $\varphi(\mu_1,\mu_2)$ справедливы неравенства

$$\varphi(\mu_1,\mu_2)\le\frac{C|\mu_1|^{\sigma_1-n_1}|\mu_2|^{\sigma_2-n_2}(1+|\mu_2|)^{-\gamma}}{|\mu_1-\mu_2|}\|A^{n_1+n_2}x\|\le$$
$$\le C\sup_{\mu_2\in L_2(a_2,\varphi_2)}\left(\frac{|\mu_2|}{|\mu_2|+1}\right)^{\gamma}\|A^{n_1+n_2}x\|\frac{|\mu_1|^{\sigma_1-n_1}|\mu_2|^{\sigma_2-n_2-\gamma}}{|\mu_1-\mu_2|}.$$

Следовательно, сходимость интеграла (3) будет следовать из сходимости интеграла

$$I=\int_{L(a_1,\varphi_1)}|d\mu_1|\int_{L(a_2,\varphi_2)}\Psi(\mu_1,\mu_2)|d\mu_2|,$$

где

$$\Psi(\mu_1,\mu_2)=\frac{|\mu_1|^{\sigma_1-n_1}|\mu_2|^{\sigma_2-n_2-\gamma}}{|\mu_1-\mu_2|},$$

что эквивалентно сходимости интегралов

$$I_{ij}=\int_{L_i(a_1,\varphi_1)}|d\mu_1|\int_{L_j(a_2,\varphi_2)}\Psi(\mu_1,\mu_2)|d\mu_2|\qquad(i,j=1,2,3).$$

Рассмотрим случай $i=j=1$.

$$I_{11}=\int_{a_1}^{+\infty}u^{\sigma_1-n_1}\,du\int_{a_2}^{+\infty}\frac{v^{\sigma_2-n_2-\gamma}dv}{|ue^{i\varphi_1}-ve^{i\varphi_2}|}=$$
$$=\int_{a_1}^{+\infty}u^{\sigma_1-n_1}\,du\int_{a_2}^{+\infty}\frac{v^{\sigma_2-n_2-\gamma}dv}{\sqrt{u^2+v^2-2uv\cos(\varphi_1-\varphi_2)}}.$$

После замены переменных $v=\tau u$ имеем

$$I_{1,1}=\int_{a_1}^{+\infty}u^{\sigma_1-n_1+\sigma_2-n_2-\gamma}\,du\int_{\frac{a_2}{u}}^{+\infty}\frac{\tau^{\sigma_2-n_2-\gamma}d\tau}{\sqrt{1+\tau^2-2\tau\cos(\varphi_1-\varphi_2)}}\le$$
$$\le\int_{a_1}^{+\infty}u^{\sigma_1-n_1+\sigma_2-n_2-\gamma}\,du\left(C_1\int_{\frac{a_2}{u}}^{1}\tau^{\sigma_2-n_2-\gamma}\,d\tau+C_2\int_1^{+\infty}\tau^{\sigma_2-n_2-\gamma-1}\,d\tau\right)$$

при некоторых C_1 и C_2. Интегралы справа сходятся в силу ограничений на параметры.

Теперь пусть $i=1,\ j=2$.

$$I_{1,2}=\int_{a_1}^{+\infty}u^{\sigma_1-n_1}\,du\int_{-\varphi_2}^{\varphi_2}\frac{a_2^{\sigma_2-n_2-\gamma+1}d\varphi}{|ue^{i\varphi_1}-a_2e^{i\varphi}|}=$$
$$=\int_{a_1}^{+\infty}u^{\sigma_1-n_1}\,du\int_{-\varphi_2}^{\varphi_2}\frac{a_2^{\sigma_2-n_2-\gamma+1}d\varphi}{|u^2+a_2^2-2a_2u\cos(\varphi_1-\varphi)|}\le$$
$$\le a_2^{\sigma_2-n_2-\gamma+1}\int_{a_1}^{+\infty}\frac{u^{\sigma_1-n_1}\,du}{\sqrt{u^2+a_2^2-2a_2u\cos(\varphi_1-\varphi_2)}}.$$

Последний интеграл сходится, так как подынтегральная функция в нем эквивалентна $u^{\sigma_1-n_1-1}$ при $u \to \infty$, а $\sigma_1 - n_1 - 1 < -1$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично. Утверждение доказано.

Утверждение 3. *Пусть* $f_i \in F_0(a, \varphi, \sigma_i)$ $(i = 1, 2)$. *Тогда*

1) *если оператор* $f_1(A)$ *непрерывен, то*

$$f_1(A)f_2(A) \subset (f_1 f_2)(A);$$

2) *если оператор* $f_2(A)$ *непрерывен, то*

$$f_1(A)f_2(A) \supset (f_1 f_2)(A).$$

Доказательство. 1) Пусть $f_1(A)$ – непрерывный оператор, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\sigma_i < n + \gamma - 1$ $(i = 1, 2)$, $x \in D(f_2(A))$, $y = f_2(A)x$. Тогда существует такая последовательность $\{x_m\} \subset D(A^{2n})$, что $x_m \to x$, $f_2(A, 2n)\ x_m \to y$ при $m \to \infty$. По утверждению 2

$$f_1(A)f_2(A, n)x_m = f_1(A, n)f_2(A, n)x_m = (f_1 f_2)(A, 2n)x_m.$$

Переходим к пределу в этом соотношении при $m \to \infty$ с учетом непрерывности оператора $f_1(A)$. Получаем

$$f_1(A)f_2(A)x = f_1(A)y = (f_1 f_2)(A)x.$$

2) Пусть теперь оператор $f_2(A)$ непрерывен, $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_i < n + \gamma - 1$ $(i = 1, 2)$, $x \in D((f_1 f_2)(A))$, $y = (f_1 f_2)(A)x$. Тогда существует такая последовательность $\{x_m\} \subset D(A^{2n})$, что $x_m \to x$, $(f_1 f_2)(A, 2n)\ x_m \to y$ при $m \to \infty$. По утверждению 2

$$f_1(A, n)f_2(A)x_m = f_1(A, n)f_2(A, n)x_m = (f_1 f_2)(A, 2n)x_m.$$

Из непрерывности оператора $f_2(A)$ при переходе к пределу при $m \to \infty$ получаем равенство

$$f_1(A)f_2(A)x = y = (f_1 f_2)(A)x.$$

Утверждение доказано.

Следствие 1. *Пусть* $l \in \mathbb{N}$, $f \in F_0$. *Тогда*

$$f(A)A^l \subset (f(\lambda)\lambda^l)(A) \subset A^l f(A),$$

причем оператор $A^l f(A)$ *замкнут.*

Доказательство вытекает из включений

$$A^{-l}(f(\lambda)\lambda^l)(A) \subset (\lambda^{-l} f(\lambda)\lambda^l)(A) = f(A),$$
$$(f(\lambda)\lambda^l)(A)A^{-l} \supset (f(\lambda)\lambda^l\lambda^{-l})(A) = f(A)$$

и непрерывности оператора A^{-l}.

Установим замкнутость оператора $A^l f(A)$. Пусть $\{x_k\} \subset D(A^l f(A))$, $x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$, $A^l f(A)x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y$. Тогда, в силу непрерывности A^{-l}, $f(A)x_k \to \to A^{-l}y$, т. е. $f(A)x = A^{-l}y$ и, следовательно, $A^l f(A)x = y$. Таким образом, оператор $A^l f(A)$ замкнут. Следствие доказано.

Утверждение 4. *Для* $f \in F_1$ $\;(f(A))^{-1} = \left(\frac{1}{f}\right)(A)$.

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $|\sigma_i| < n + \gamma - 1$ $(i = 1, 2)$, $x \in D(f(A))$, $y = = f(A)x$. Так как $f(A) = \overline{f(A, 2n)}$, то существует такая последовательность $\{x_m\} \subset D(A^{2n})$, что $x_m \to x$, $f(A, 2n)x_m \to y$ при $m \to \infty$. По утверждению 1 $f(A, 2n)x_m = f(A, n)x_m$. Применяя утверждение 2, получаем

$$\left(\frac{1}{f}\right)(A, n)f(A, n)x_m = x_m.$$

Перейдем в этом соотношении к пределу при $m \to \infty$. Так как $\overline{\left(\frac{1}{f}\right)(A, n)} = = \left(\frac{1}{f}\right)(A)$, то имеем $\left(\frac{1}{f}\right)(A)y = x$, т. е. $\left(\frac{1}{f}\right)(A)f(A)x = x$. Таким образом, $\left(\frac{1}{f}\right)(A)f(A)x = x$ для $x \in D(f(A))$. Заменяя f на $\frac{1}{f}$, получаем $f(A)\left(\frac{1}{f}\right)(A)x = x$ для $x \in D\left(\left(\frac{1}{f}\right)(A)\right)$. Из последних двух соотношений следует заключение утверждения.

Утверждение 5. *Если* $n \in \mathbb{N}$, $f \in F_1$, *то*

$$(\lambda^n f)(A) = A^n f(A).$$

Доказательство достаточно провести для $n = 1$. Вначале установим, что для $z \in \mathbb{C}$, $l \in \mathbb{N}$ таких, что $-\sigma_1 - l < \gamma - 1$, справедливо соотношение

$$A^l\varphi(A) = (\lambda^l\varphi)(A). \tag{4}$$

По утверждению 3 и с учетом непрерывности оператора $\left(\frac{1}{\lambda^l\varphi}\right)(A)$ имеет место равенство

$$\left(\frac{1}{\varphi}\right)(A)A^{-l} = \left(\frac{1}{\lambda^l\varphi}\right)(A).$$

Переходя к обратным операторам в этом равенстве (с помощью утверждения 4), получаем (4).

Умножим обе части (4) на $A^{-(l-1)}$. В силу первой части утверждения 3

$$\left(\frac{1}{\varphi}\right)(A)A^{-1} \supset \left(\frac{1}{\lambda\varphi}\right)(A). \tag{5}$$

Но тогда для обратных операторов

$$A\varphi(A) \supset (\lambda\varphi)(A). \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует утверждение для $n = 1$. Утверждение доказано.

Утверждение 6. *Для $f_1, f_2 \in F_1$ справедливо*

$$f_1(A)f_2(A) \subset (f_1f_2)(A). \tag{7}$$

Если хотя бы один из операторов $f_2(A)$ или $\left(\frac{1}{f_1}\right)(A)$ ограничен, то

$$f_1(A)f_2(A) = (f_1f_2)(A). \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $l \in \mathbb{N}$ таково, что $\sigma_2(f_1) < l + \gamma - 1$. Тогда оператор $\left(\frac{f_1}{\lambda^l}\right)(A)$ ограничен и, в силу утверждений 3, 5,

$$f_1(A)f_2(A) = A^l\left(\frac{f_1(\lambda)}{\lambda^l}\right)(A)f_2(A) \subset A^l\left(\frac{f_1f_2}{\lambda^l}\right)(A) = (f_1f_2)(A).$$

Если оператор $f_2(A)$ непрерывен, то (8) имеет место в силу утверждения 3. Если $\left(\frac{1}{f_1}\right)(A)$ непрерывен, то по доказанному

$$\left(\frac{1}{f_2}\right)(A)\left(\frac{1}{f_1}\right)(A) = \left(\frac{1}{f_1f_2}\right)(A).$$

По утверждению 4 отсюда вытекает (8). Утверждение 6 доказано.

Утверждение 7. *Для $f \in F_0$, $l \in \mathbb{N}$ справедливы соотношения*

$$\overline{f(A)A^l} = (\lambda^l f)(A) \subset A^l f(A). \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $g(\lambda) = \lambda^l$. При достаточно большом n

$$(\lambda^l f)(A, 2n) \subset f(A, n)g(A, n) \subset f(A)A^l \subset (\lambda^l f)(A).$$

Отсюда $\overline{f(A)A^l} = (\lambda^l f)(A)$. Второе из соотношений (9) вытекает из следствия утверждения 3. Утверждение доказано.

Утверждение 8. *Пусть* $f_1, f_2, \dots, f_m \in F_1$. *Тогда*

$$\overline{f_1(A) f_2(A) \dots f_m(A)} = (f_1 f_2 \dots f_m)(A). \tag{10}$$

Доказательство. Для достаточно больших n с использованием утверждений 2 и 6 получаем

$$(f_1 f_2 \dots f_m)(A, nm) \subset f_1(A,n) f_2(A,n) \dots f_m(A,n) \subset (f_1 f_2 \dots f_m)(A).$$

Отсюда, переходя к замыканиям, получаем (10). Утверждение доказано.

Следствие 2. *Пусть* $f_1, f_2, \dots, f_m \in F_1$, $1 \le k < m$. *Тогда*

$$\overline{f_1(A) f_2(A) \dots f_m(A)} = \overline{(f_1 \dots f_k)(A)(f_{k+1} \dots f_m)(A)} = (f_1 f_2 \dots f_m)(A).$$

Следствие вытекает из включений

$$f_1(A) \dots f_k(A) \subset (f_1 \dots f_k)(A), \quad f_{k+1}(A) \dots f_m(A) \subset (f_{k+1} \dots f_m)(A),$$
$$(f_1 \dots f_k)(A)(f_{k+1} \dots f_m)(A) \subset (f_1 \dots f_m)(A).$$

Литература

1. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.

2. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.

3. Коркина Л. Ф., Рекант М. А. Дробные степени одного класса операторов // Изв. вузов. Математика. 1991. № 9. С. 81–83.

4. Коркина Л. Ф., Рекант М. А. Интегральные представления дробных степеней // Изв. Урал. гос. ун-та. 1998. № 10. (Математика и механика. Вып. 1). С. 80–91.

5. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.

Статья поступила 24.05.2005 г.
Окончательный вариант 06.06.2005 г.